

# Wiskunde voor bachelor en master

## Deel 5 De Laplace-transformatie met toepassingen

Anne Kaldewaij

2021, Syntax Media, Utrecht

# Inhoud

|                                                         |          |
|---------------------------------------------------------|----------|
| Over de serie                                           | v        |
| Over deel 5                                             | vi       |
| Notaties                                                | viii     |
| <b>1 De Laplace-transformatie</b>                       | <b>1</b> |
| 1.1 Inleiding                                           | 1        |
| 1.2 De definitie van de Laplace-transformatie           | 3        |
| 1.2.1 Opgaven                                           | 6        |
| 1.3 Basisrekenregels van de Laplace-transformatie       | 6        |
| 1.3.1 Opgaven                                           | 11       |
| 1.4 Tijdschaling en exponentiële schaling               | 12       |
| 1.4.1 Opgaven                                           | 16       |
| 1.5 Differentiëren en integreren in het $s$ -domein     | 17       |
| 1.5.1 Opgaven                                           | 20       |
| 1.6 De inverse Laplace-transformatie $\mathcal{L}^{-1}$ | 21       |
| 1.6.1 Opgaven                                           | 22       |
| 1.7 De Laplace-transformatie – een samenvatting         | 23       |
| 1.7.1 Gemengde opgaven                                  | 25       |

|          |                                                         |           |
|----------|---------------------------------------------------------|-----------|
| <b>2</b> | <b>Lineaire differentiaalvergelijkingen</b>             | <b>27</b> |
| 2.1      | Wat zijn differentiaalvergelijkingen?                   | 27        |
| 2.1.1    | Opgaven                                                 | 30        |
| 2.2      | Beginwaardeproblemen van de eerste orde                 | 31        |
| 2.2.1    | Opgaven                                                 | 34        |
| 2.3      | Technieken rond het breuksplitsen                       | 35        |
| 2.3.1    | Breuksplitsen en kwadraatafsplitsen                     | 35        |
| 2.3.2    | Handig breuksplitsen                                    | 38        |
| 2.3.3    | Opgaven                                                 | 40        |
| 2.4      | Beginwaardeproblemen van de tweede orde                 | 40        |
| 2.4.1    | Opgaven                                                 | 42        |
| 2.5      | Lineaire differentiaalvergelijkingen – een samenvatting | 42        |
| 2.5.1    | Gemengde opgaven                                        | 42        |
| <b>3</b> | <b>Natuurlijke en gedwongen respons</b>                 | <b>43</b> |
| 3.1      | Een opsplitsing van de output                           | 43        |
| 3.1.1    | Opgaven                                                 | 47        |
| 3.2      | De systeemfunctie                                       | 48        |
| 3.2.1    | Opgaven                                                 | 51        |
| 3.3      | Natuurlijke en gedwongen respons – een samenvatting     | 52        |
| 3.3.1    | Gemengde opgaven                                        | 53        |
| <b>4</b> | <b>Klassieke toepassingen</b>                           | <b>55</b> |
| 4.1      | Inleiding                                               | 55        |
| 4.2      | Systemen uit de mechanica                               | 56        |
| 4.2.1    | De rechtlijnige beweging                                | 56        |
| 4.2.2    | Het massa-veersysteem                                   | 56        |
| 4.2.3    | Opgaven                                                 | 61        |
| 4.3      | Systemen uit de elektrotechniek                         | 62        |
| 4.3.1    | De $RC$ -kring                                          | 63        |
| 4.3.2    | De $RL$ -kring                                          | 64        |
| 4.3.3    | De $RLC$ -kring                                         | 65        |
| 4.3.4    | Opgaven                                                 | 66        |
| 4.4      | Klassieke toepassingen – een samenvatting               | 67        |

|          |                                                        |           |
|----------|--------------------------------------------------------|-----------|
| <b>5</b> | <b>Stuksgewijs continue functies</b>                   | <b>69</b> |
| 5.1      | Stuksgewijs continu                                    | 69        |
| 5.2      | De functie van Heaviside                               | 70        |
| 5.2.1    | De verschuivingsregel in het $t$ -domein               | 71        |
| 5.2.2    | Discontinuïteiten                                      | 73        |
| 5.2.3    | Opgaven                                                | 74        |
| 5.3      | De deltafunctie                                        | 75        |
| 5.3.1    | Model en werkelijkheid                                 | 75        |
| 5.3.2    | Opgaven                                                | 78        |
| 5.3.3    | Een aangepaste definitie van de Laplace-transformatie  | 79        |
| 5.3.4    | Opgaven                                                | 83        |
| 5.4      | Causale functies en systemen en het gebruik van $u(t)$ | 84        |
| 5.4.1    | Opgaven                                                | 88        |
| 5.5      | De impulsrespons                                       | 89        |
| 5.5.1    | Opgaven                                                | 90        |
| 5.6      | Stuksgewijs continue functies – een samenvatting       | 91        |
| 5.6.1    | Gemengde opgaven                                       | 93        |
| <br>     |                                                        |           |
| <b>6</b> | <b>Lineaire tijdsinvariante systemen</b>               | <b>95</b> |
| 6.1      | Systemen                                               | 95        |
| 6.2      | Lineaire systemen                                      | 97        |
| 6.2.1    | Opgaven                                                | 98        |
| 6.3      | Tijdsinvariante systemen                               | 99        |
| 6.3.1    | Opgaven                                                | 101       |
| 6.4      | Lineaire tijdsinvariante systemen – een samenvatting   | 102       |
| 6.4.1    | Gemengde opgaven                                       | 102       |

|          |                                        |            |
|----------|----------------------------------------|------------|
| <b>7</b> | <b>De convolutie</b>                   | <b>103</b> |
| 7.1      | De respons van een LTI-systeem         | 103        |
| 7.1.1    | Opgaven                                | 106        |
| 7.2      | De convolutiestelling                  | 107        |
| 7.3      | Andere eigenschappen van de convolutie | 110        |
| 7.3.1    | Opgaven                                | 112        |
| 7.4      | Een grafische voorstelling van $f * h$ | 114        |
| 7.4.1    | Opgaven                                | 117        |
| 7.5      | De convolutie – een samenvatting       | 118        |
| 7.5.1    | Gemengde opgaven                       | 119        |
| <b>8</b> | <b>Systeemtheorie</b>                  | <b>121</b> |
| 8.1      | Inleiding                              | 121        |
| 8.2      | Blokschema's                           | 121        |
| 8.2.1    | Overdrachtsfuncties                    | 122        |
| 8.2.2    | De terugkoppeling                      | 123        |
| 8.2.3    | Opgaven                                | 125        |
| 8.3      | Polen en nulpunten                     | 126        |
| 8.3.1    | Complexe getallen                      | 127        |
| 8.3.2    | Opgaven                                | 130        |
| 8.3.3    | Polen                                  | 131        |
| 8.3.4    | Opgaven                                | 134        |
| 8.4      | De eindwaardestelling                  | 134        |
| 8.4.1    | Opgaven                                | 139        |
|          | <b>Antwoorden opgaven</b>              | <b>141</b> |
|          | <b>Index</b>                           | <b>153</b> |
|          | <b>Basisfuncties en rekenregels</b>    | <b>155</b> |

Een tabel van Laplace-getransformeerden is als onderstaand. Hierin zijn de meest voorkomende getransformeerden opgenomen.

Het is niet nodig deze tabel van buiten te leren, maar je moet wel de vormen kunnen herkennen.

De gedempte trillingen  $e^{-at} \sin \omega t$  en  $e^{-at} \cos \omega t$  volgen uit de regel voor exponentiële schaling (zie ook voorbeeld 2 van paragraaf 1.4), net als de regel voor  $t e^{at}$ .

Tabel van alle standaardfuncties:

| $f(t)$                                                     | $F(s) = \int_0^\infty f(t) e^{-st} dt$ |
|------------------------------------------------------------|----------------------------------------|
| 1                                                          | $\frac{1}{s}$                          |
| $t$                                                        | $\frac{1}{s^2}$                        |
| $t^n$                                                      | $\frac{n!}{s^{n+1}}$                   |
| $e^{at}$                                                   | $\frac{1}{s-a}$                        |
| $t e^{at}$                                                 | $\frac{1}{(s-a)^2}$                    |
| $\sin \omega t$                                            | $\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$        |
| $\cos \omega t$                                            | $\frac{s}{s^2 + \omega^2}$             |
| $e^{-at} \sin \omega t$                                    | $\frac{\omega}{(s+a)^2 + \omega^2}$    |
| $e^{-at} \cos \omega t$                                    | $\frac{s+a}{(s+a)^2 + \omega^2}$       |
| $\frac{t \sin \omega t}{2\omega}$                          | $\frac{s}{(s^2 + \omega^2)^2}$         |
| $\frac{\sin \omega t - \omega t \cos \omega t}{2\omega^3}$ | $\frac{1}{(s^2 + \omega^2)^2}$         |

**1.7.1 Gemengde opgaven**

Je kunt bij deze opgaven ook gebruikmaken van de overzichten achter in je boek.

1. Bepaal de Laplace-getransformeerde van:

- |              |                |
|--------------|----------------|
| a. $2t - 1$  | d. $\sin 2t$   |
| b. $e^{2t}$  | e. $t^2 - 4$   |
| c. $\cos 3t$ | f. $e^{-0,5t}$ |

2. Bepaal de Laplace-getransformeerde van:

- |                                |                              |
|--------------------------------|------------------------------|
| a. $4 - 3 \sin 2t$             | d. $1 - e^{-t} \cos 2t$      |
| b. $t e^{-t}$                  | e. $2 - e^{-t}$              |
| c. $\cos(3t - \frac{1}{3}\pi)$ | f. $e^{-t}(\cos t + \sin t)$ |

3. Bepaal de Laplace-getransformeerde van:

- |                        |                   |
|------------------------|-------------------|
| a. $(2t^2 + 1)e^{-2t}$ | d. $\cos(2t + 1)$ |
| b. $-7(t - 1)^2$       | e. $\sin^2 t$     |
| c. $e^{t-1}$           | f. $\cos^2 t$     |

4. Bepaal de inverse Laplace-getransformeerde van:

- |                        |                            |
|------------------------|----------------------------|
| a. $\frac{1}{s^2}$     | d. $\frac{s}{(s+1)^2 + 1}$ |
| b. $\frac{1}{(s-1)^2}$ | e. $\frac{s}{(s+1)^2}$     |
| c. $\frac{1}{(s+1)^2}$ | f. $\frac{s-1}{9s^2 + 1}$  |

5. Bepaal de Laplace-getransformeerde van:

- |               |                                      |
|---------------|--------------------------------------|
| a. $t \sin t$ | c. $t^2 \sin t$                      |
| b. $t \cos t$ | d. $\int_0^t 1 - \sin \tau \, d\tau$ |

### 2.3.3 Opgaven

Bepaal van de volgende functies de inverse Laplace-getransformeerde.

Je mag zelf bepalen hoe je de breuksplitsing berekent.

- |                                    |                                                |
|------------------------------------|------------------------------------------------|
| 1. a. $\frac{1}{s^2 - 4}$          | d. $\frac{3s - 2}{s^2 - 4s + 20}$              |
| b. $\frac{3s + 7}{s^2 - 2s - 3}$   | e. $\frac{6s - 2}{(s - 1)(s^2 + 1)}$           |
| c. $\frac{s + 3}{s^2 + 8s + 16}$   | f. $\frac{s}{(s - 3)^2}$                       |
| 2. a. $\frac{3}{(2s - 3)^2}$       | c. $\frac{14 + s - s^2}{(s - 3)(s^2 - s - 2)}$ |
| b. $\frac{4s}{4s^2 + 4s + 1}$      | d. $\frac{s}{(s^2 + 1)(s^2 + 2)}$              |
| 3. a. $\frac{s}{(s + 1)(s - 1)^2}$ | b. $\frac{s^2 + s + 1}{s(s + 1)^2}$            |
| 4. $\frac{1}{s^2(s^2 + 1)^2}$      |                                                |

### 2.4 Beginwaardeproblemen van de tweede orde

Een *beginwaardeprobleem van de tweede orde* bestaat uit een differentiaalvergelijking van de vorm:

$$ay'' + by' + cy = f(t)$$

samen met gegeven beginwaarden voor  $y(0)$  en  $y'(0)$ .

Beginwaardeproblemen van de tweede orde los je op met de regels voor de eerste en de tweede afgeleide:

$$\begin{aligned} y &\rightarrow Y \\ y' &\rightarrow sY - y(0) \\ y'' &\rightarrow s^2Y - sy(0) - y'(0) \end{aligned}$$

Daarmee wordt de differentiaalvergelijking in  $y$  weer omgezet in een algebraïsche vergelijking in  $Y$ . Dat levert een formule voor  $Y$  en met behulp van breuksplitsen vind je de oplossing  $y$ .

**Voorbeeld**

Gevraagd wordt  $y(t)$  met: 
$$\begin{cases} y'' + 4y' + 4y = e^{-2t} \\ y(0) = 1, y'(0) = 2 \end{cases}.$$

Oplossing:

$$y'' + 4y' + 4y = e^{-2t} \quad \{\text{neem de Laplace-getransformeerde}\}$$

$$\rightarrow s^2Y - sy(0) - y'(0) + 4(sY - y(0)) + 4Y = \frac{1}{s+2} \quad \{y(0) = 1, y'(0) = 2\}$$

$$\Leftrightarrow s^2Y - s - 2 + 4(sY - 1) + 4Y = \frac{1}{s+2} \quad \{\text{termen samen nemen}\}$$

$$\Leftrightarrow (s^2 + 4s + 4)Y - s - 6 = \frac{1}{s+2} \quad \{\text{algebra}\}$$

$$\Leftrightarrow (s+2)^2Y = s+6 + \frac{1}{s+2} \quad \{\text{deel door } (s+2)^2\}$$

$$\Leftrightarrow Y = \frac{s+6}{(s+2)^2} + \frac{1}{(s+2)^3}$$

Herschrijf de eerste term:  $\frac{s+6}{(s+2)^2} = \frac{s+2+4}{(s+2)^2} = \frac{1}{s+2} + \frac{4}{(s+2)^2}.$

Dat levert voor  $Y$ :

$$Y = \frac{1}{s+2} + \frac{4}{(s+2)^2} + \frac{1}{(s+2)^3}$$

Dit kun je terugtransformeren:  $y = e^{-2t} + 4te^{-2t} + \frac{1}{2}t^2e^{-2t}.$

Deze oplossing kun je ook schrijven als  $y = (\frac{1}{2}t^2 + 4t + 1)e^{-2t}.$

Beginwaardeproblemen van nog hogere orde (3 of meer) kunnen op dezelfde manier worden opgelost. Het principe is dat de differentiaalvergelijking wordt omgezet naar een algebraïsche vergelijking, die eenvoudig kan worden opgelost.

Het breuksplitsen is vaak het meeste werk. Het voorbeeld laat zien dat het verstandig is om goed naar de vorm te kijken. Vaak kan een breuksplitsing op een ad-hocmanier, als in dit voorbeeld, eenvoudig worden gevonden.

### 5.3 De deltafunctie

#### 5.3.1 Model en werkelijkheid

In figuur 5.14 staat nog eens de functie van Heaviside afgebeeld.

Deze functie staat model voor een input die op tijdstip  $t = 0$  van 0 naar 1 gaat.

In werkelijkheid kan dit niet in het ondeelbare moment  $t = 0$  plaatsvinden. Bij het omzetten van een schakelaar is er altijd enige tijd nodig om de spanning van 0 tot een eindwaarde op te laten lopen.

Functie  $u(t)$  is het wiskundig model van een overgang die in een *zeer korte tijd* rond  $t = 0$  plaatsvindt.

In figuur 5.15 staat een realistischer model  $\tilde{u}(t)$  van deze overgang. In de zeer korte tijd  $\varepsilon$  neemt de waarde van de input toe van 0 naar 1. Dit meer realistische model  $\tilde{u}(t)$  is een mooie differentieerbare functie.

De afgeleide van  $\tilde{u}(t)$  kun je aflezen uit de grafiek van figuur 5.15. Voor en na het tijdsinterval  $\varepsilon$  is  $\tilde{u}(t)$  constant en dus  $\tilde{u}'(t) = 0$ . In het tijdsinterval  $\varepsilon$  stijgt  $\tilde{u}(t)$ , met een buigpunt in  $t = 0$  waar de stijging maximaal is. Daarna neemt de afgeleide weer af tot de waarde 0.

Hierbij past de grafiek van figuur 5.16.

De oppervlakte van deze figuur is:

$$\int_{-\frac{1}{2}\varepsilon}^{\frac{1}{2}\varepsilon} \tilde{u}'(t) dt = \left[ \tilde{u}(t) \right]_{-\frac{1}{2}\varepsilon}^{\frac{1}{2}\varepsilon} = 1 - 0 = 1$$

Zo'n functie heet een *impulsfunctie* met grootte 1. Omdat  $\varepsilon$  zeer klein is, spreek je over een impuls *op* tijdstip  $t = 0$ . Omdat de grootte 1 is, heet het een *eenheidsimpuls*.

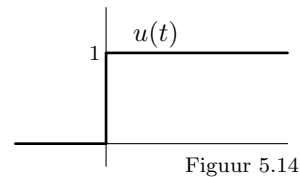
De eenheidsimpuls wordt aangegeven met  $\delta(t)$ , de *deltafunctie* of *functie van Dirac*. Deze teken je als pijl in de oorsprong met grootteaanduiding 1 (figuur 5.17).

Bij model  $u(t)$  hoort dus een werkelijkheid als  $\tilde{u}(t)$ .

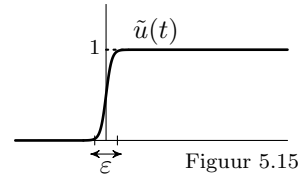
De afgeleide  $\tilde{u}'(t)$  is een impuls genoteerd als  $\delta(t)$ .

We schrijven daarom:

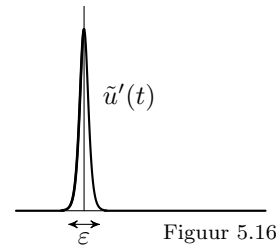
$$u'(t) = \delta(t)$$



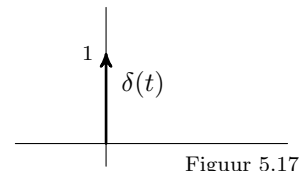
Figuur 5.14



Figuur 5.15

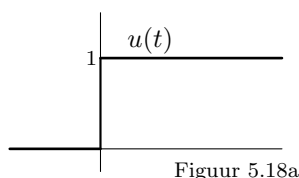


Figuur 5.16

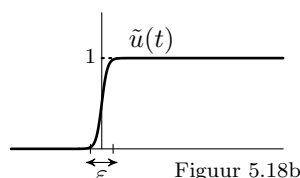


Figuur 5.17

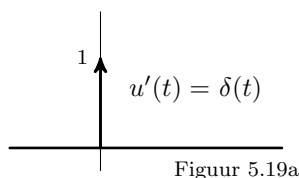
Met links de modellen en rechts ‘de werkelijkheid’ hebben we dus:



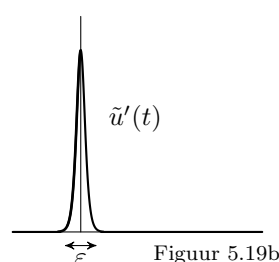
Figuur 5.18a



Figuur 5.18b



Figuur 5.19a



Figuur 5.19b

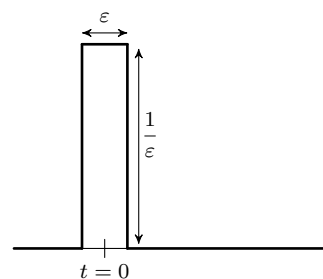
Je doet alle berekeningen met  $u(t)$  en  $\delta(t)$ , maar om eigenschappen van deze functies te bepalen, bekijk je waar deze model voor staan.

Soms wordt voor  $\tilde{u}(t)$  de grafiek in figuur 5.20 gebruikt. In een zeer korte tijd  $\varepsilon$  treedt een input op, met een sterkte  $\frac{1}{\varepsilon}$ .

De pulsgrootte is 1 (dat is steeds de oppervlakte).

Weer een ander model staat in figuur 5.21.

In een zeer korte tijd  $\varepsilon$  stijgt de grafiek lineair van 0 naar  $\frac{1}{\varepsilon}$ . Daarna daalt de grafiek lineair terug naar 0, weer in dezelfde zeer korte tijd  $\varepsilon$ .



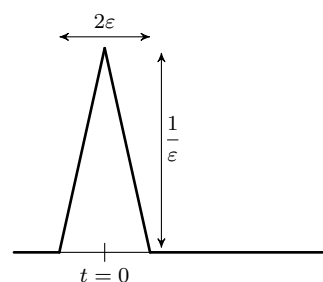
Figuur 5.20

Een impuls met breedte  $\varepsilon = 0,1$  en hoogte  $\frac{1}{\varepsilon} = 10$  is afgebeeld in figuur 5.22.

Hierbij hoort bijvoorbeeld een hamerklap van 10 N die in 0,1 seconde plaatsvindt.

Hoe de vorm van  $\tilde{u}(t)$  exact is, doet er niet toe. Waar het om gaat is dat de tijdsduur extreem kort is en dat de oppervlakte eronder 1 is.

De deltafunctie  $\delta(t)$  staat dus voor een input als in de figuren 5.19b, 5.20, 5.21 en 5.22.



Figuur 5.21

Anders gezegd:  $\delta$  staat voor een functie uit de klasse van alle eenheidsimpulsen in 0.

## 7.2 De convolutiestelling

In de vorige paragraaf is de convolutie van twee functies gedefinieerd. Voor functies  $f$  en  $g$  is die definitie:

$$f * g(t) = \int_0^t f(\tau)g(t - \tau) d\tau$$

De belangrijkste eigenschap van het convolutieproduct heeft te maken met de Laplace-transformatie. Deze eigenschap noemen we de *convolutiestelling* en deze luidt:

$$\mathcal{L}(f * g) = \mathcal{L}(f) \cdot \mathcal{L}(g)$$

Of, met de notatie  $f(t) \rightarrow F(s)$ :

$$f(t) * g(t) \rightarrow F(s) \cdot G(s)$$

De Laplace-transformatie zet het convolutieproduct in het  $t$ -domein om in een gewoon product in het  $s$ -domein. In het bijzonder kun je de respons  $y(t) = f(t) * h(t)$  op twee manieren bepalen. Rechtstreeks in het  $t$ -domein met de convolutie-integraal, of via het  $s$ -domein met  $F(s)$  en  $H(s)$ .

Zie ook het schema hiernaast:

Een LTI-systeem heeft impulsrespons  $h(t)$ .

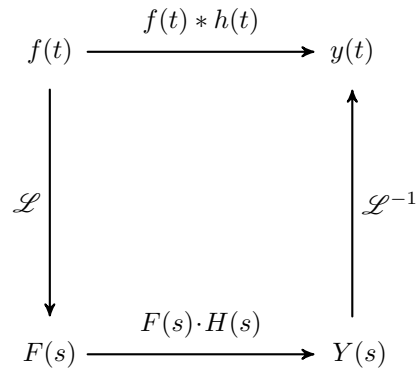
Voor de respons  $y$  op input  $f$  geldt dan:

in het  $t$ -domein:  $y(t) = f(t) * h(t)$

in het  $s$ -domein:  $Y(s) = F(s) \cdot H(s)$

Is de convolutie-integraal voor het berekenen van  $f(t) * h(t)$  te ingewikkeld, dan bepaal je  $F(s)$  en  $H(s)$ .

De inverse Laplace-getransformeerde van het product  $F(s) \cdot H(s)$  is dan  $f(t) * h(t)$ .



**Voorbeelden**

1. Als  $f(t) = 1$  en  $h(t) = e^{-t}$ , dan kun je  $f * h$  op twee manieren berekenen.

De eerste manier gaat met de convolutie-integraal:

$$\begin{aligned}(f * h)(t) &= \int_0^t 1 \cdot e^{-(t-\tau)} d\tau = \int_0^t e^{-t} e^{\tau} d\tau = e^{-t} \int_0^t e^{\tau} d\tau = \\ &= e^{-t} \left[ e^{\tau} \right]_{\tau=0}^t = e^{-t} (e^t - 1) = 1 - e^{-t}\end{aligned}$$

De tweede manier gaat met de convolutiestelling:

$$\mathcal{L}(1) = \frac{1}{s} \text{ en } \mathcal{L}(e^{-t}) = \frac{1}{s+1}, \text{ dus } \mathcal{L}(f * h) = \mathcal{L}(f) \cdot \mathcal{L}(h) = \frac{1}{s(s+1)}$$

Breuksplitsen geeft  $\frac{1}{s(s+1)} = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+1}$ , dus  $(f * h)(t) = 1 - e^{-t}$ .

2. We berekenen  $t^2 * t$  op twee manieren. Eerst met de convolutie-integraal:

$$t^2 * t = \int_0^t \tau^2 \cdot (t - \tau) d\tau = \int_0^t t\tau^2 - \tau^3 d\tau = \left[ \frac{1}{3}t\tau^3 - \frac{1}{4}\tau^4 \right]_{\tau=0}^t = \frac{1}{3}t^4 - \frac{1}{4}t^4 = \frac{1}{12}t^4$$

Met de convolutiestelling gaat het zo:

$$t^2 \rightarrow \frac{2}{s^3} \text{ en } t \rightarrow \frac{1}{s^2}, \text{ dus dan geldt } t^2 * t \rightarrow \frac{2}{s^3} \cdot \frac{1}{s^2} = \frac{2}{s^5} = \frac{1}{12} \frac{4!}{s^5}$$

Terugtransformeren levert  $t^2 * t = \frac{1}{12}t^4$ .

Door de convolutiestelling kun je bij het ontwerpen en analyseren van systemen veel in het  $s$ -domein berekenen. Dat is meestal eenvoudiger dan in het  $t$ -domein.

In het  $s$ -domein is de respons op  $F(s)$  gelijk aan  $F(s)H(s)$ , een eenvoudig product. Differentiëren is in het  $s$ -domein een vermenigvuldiging met  $s$  en integreren is een deling door  $s$ . Deze eigenschappen maken het ontwerpen en analyseren van ingewikkelde systemen relatief eenvoudig. De convolutiestelling is daarbij een cruciale eigenschap.

Een afleiding van de convolutiestelling kan met behulp van dubbelintegralen (zie hiervoor deel 2, hoofdstuk 9). Voor de volledigheid is de afleiding hier opgenomen.

### 8.3.4 Opgaven

1. Bepaal de polen en de nulpunten van de volgende overdrachtsfuncties. Geef ook aan of de bijbehorende systemen stabiel zijn.

a.  $\frac{s+1}{4s^2-s}$

c.  $\frac{s}{s^2-4s+6}$

b.  $\frac{4s-1}{s^3+s}$

d.  $\frac{s}{s^4+5s^2+4}$

2. Bepaal de polen van de systemen bij de volgende differentiaalvergelijkingen. Geef ook aan of de systemen stabiel zijn.

a.  $y'' + 20y' + 36y = f(t)$

c.  $y'' + 4y' + 36y = f(t)$

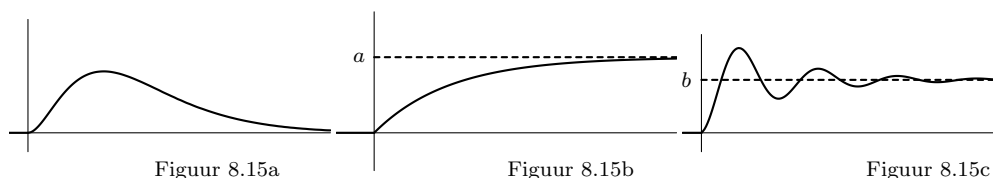
b.  $y'' + 12y' + 36y = f(t)$

d.  $y'' + 36y = f(t)$

### 8.4 De eindwaardestelling

Het laatste onderwerp rond systeemtheorie is de *eindwaardestelling*. Deze is van toepassing als de output naar een stabiele eindwaarde gaat, in het Engels aangeduid met *steady state*. Bij een goed regelsysteem heeft de respons op de stapfunctie een stabiele eindwaarde.

In figuur 8.15 staan drie voorbeelden van functies met een stabiele eindwaarde.



Wiskundig betekent het bestaan van eindwaarde  $w$  voor functie  $f(t)$ :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = w$$

De limiet moet bestaan én waarde  $w$  hebben. In figuur 8.15a is de eindwaarde 0 ('de respons sterft uit'). In figuur 8.15b stijgt de functie naar eindwaarde  $a$ , een voorbeeld van zo'n functie is  $f(t) = a(1 - e^{-2t})$ . In figuur 8.15c is de eindwaarde  $b$ , een voorbeeld is  $f(t) = b(1 - e^{-2t} \cos \omega t)$ .

Een grafiek als in figuur 8.15c kun je bij een elektronisch ontwerp op een oscilloscoop zichtbaar maken als respons op een stapfunctie  $Au(t)$ . De waarde  $b$  is dan af te lezen en ook de waarde van de frequentie  $\omega$  kan uit de grafiek worden gehaald. Die frequentie

vind je ook uit de polen van de overdrachtsfunctie. Met de eindwaardestelling, die nu aan de orde komt, kun je de eindwaarde  $b$  uit de overdrachtsfunctie bepalen.

Deze eindwaardestelling luidt als volgt:

Als de limiet  $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t)$  bestaat, dan geldt:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s)$$

Er is een voorwaarde aan de stelling: de eindwaarde moet wel bestaan. Zo heeft  $f(t) = \cos t$  geen eindwaarde, want de grafiek blijft de waarden  $-1$  en  $1$  aannemen. Ook zijn  $\infty$  of  $-\infty$  als limiet niet toegestaan: het moet een reële eindwaarde zijn.

Die voorwaarde kun je eenvoudig verifiëren met de polen van  $F(s)$ :

- Liggen er polen in het rechtervlak, dan bevat  $f(t)$  exponentieel groeiende termen en bestaat  $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t)$  niet als getal.
- Liggen er polen op de imaginaire as (boven of onder 0), dan bevat  $f(t)$  sinussen of cosinussen en bestaat  $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t)$  niet.
- Liggen alle polen in het linkervlak, dan bevat  $f(t)$  alleen exponentieel afnemende termen en die geven een bijdrage 0 aan  $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t)$ . Dan is de eindwaarde 0.
- Is er naast de polen in het linkervlak een enkelvoudige pool in 0, dan bevat  $F(s)$  een term  $\frac{A}{s}$  en  $f(t)$  dus een term  $A$ . Ook dan is er een eindwaarde, namelijk  $A$ .
- Is er naast de polen in het linkervlak een meervoudige pool met multipliciteit  $k \geq 2$  in 0, dan is  $F(s)$  van de vorm  $\frac{G(s)}{s^k}$  en bevat  $f(t)$  een term  $t^{k-1}$  met  $k-1 \geq 1$ .

In dat geval geldt  $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \infty$  en ook  $\lim_{s \rightarrow 0} sF(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{G(s)}{s^{k-1}} = \infty$ .

Dus is de stelling in dit geval ook correct met  $\infty$  als resultaat voor beide limieten.

De conclusie is dat je de eindwaardestelling mag gebruiken, als alle polen in het linkervlak liggen of een pool in 0 zijn.

Ook als  $\lim_{s \rightarrow 0} sF(s)$  waarde  $\infty$  of  $-\infty$  oplevert, is het in dat geval correct.

Liggen er polen in het rechterhalfvlak of boven 0 op de imaginaire as, dan mag de eindwaardestelling *niet* worden gebruikt.